УДК 514.75

Ю. И. Попов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РЕГУЛЯРНОГО ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано задание регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства (Н-*распределения) и доказана теорема существования. Выяснены условия голономности* Н — *распределения и введены биекции Бомпьяни – Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода для* Н-, Λ- *и L-подрасслоений, ассоциированных с* Н-*распределением.*

Regular hyperband distribution of an affine space (Н-*distribution) is given and its existence theorem is proved. Conditions of holonomic* Н-*distribution is determined and Bompiani – Pantazi bijection between the first kind normal and the second one for associated with* Н-*distribution* Н-, Λ- *and L-subbundle is introduced.*

Ключевые слова: распределение, гиперполосное распределение, гиперполоса, нормаль, тензор, квазитензор, биекция.

Key words: distribution, hyperband distribution, hyperband, normal, tensor, quasitensor, bijection.

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$I,J,K=\overline{1,n}$; $i,j,k,s=\overline{1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\lambda=\overline{m+1,n}$; $a,b,c,d=\overline{1,n-1}$; $\hat i,\hat j,\hat k,\hat s=\{\overline{1,m},n\}$.

1. Дифференциальные уравнения гиперполосного распределения аффинного пространства

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $(A,\vec e_1,\vec e_2,\ldots,\vec e_n)$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\vec A=\omega^J\vec e_J,\ d\vec e_J=\omega_J^K\vec e_K. \tag{1}$$

Инвариантные формы ω^J, ω_J^K аффинной группы преобразований удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^J=\omega^L\wedge\omega_L^J,\ d\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K. \tag{2}$$

Пусть m-мерная плоскость $\Lambda(A)$ задана линейно независимыми векторами

$$\vec m_i=\vec e_i+\Lambda_j^{\hat\alpha}\vec e_{\hat\alpha}. \tag{3}$$

Следуя [1; 2], в силу соотношений (1) – (3) структурные формы [3] многообразия $\Lambda(A)$ аффинного пространства представим в виде

$$\Delta\Lambda_i^{\hat\alpha}\overset{\text{def}}{=}\nabla\Lambda_i^{\hat\alpha}-\Lambda_i^{\hat\beta}\Lambda_j^{\hat\alpha}\omega_\beta^j+\omega_i^{\hat\alpha}. \tag{4}$$

Аналогично, формы

$$\Delta H_a^n\overset{\text{def}}{=}\nabla H_a^n-H_a^nH_b^n\omega_n^b+\omega_a^n\ - \tag{5}$$

структурные формы многообразия гиперплоскостей $\mathrm{H}(A)$, каждую из которых зададим $(n-1)$ линейно независимыми векторами

$$\vec{h}_a = \vec{e}_a + \mathrm{H}_a^n \vec{e}_n . \tag{6}$$

Известно (см., например, [1; 4]), что n-мерные погруженные многообразия в пространствах представления $\{\nabla\Lambda_i^{\hat{\alpha}}, \omega^J\}$, $\{\nabla \mathrm{H}_a^n, \omega^J\}$, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\nabla\Lambda_i^{\hat{\alpha}} = \Lambda_{iK}^{\hat{\alpha}} \omega^K, \quad \nabla \mathrm{H}_a^n = \mathrm{H}_{aK}^n \omega^K, \tag{7}$$

называются *распределениями* соответственно m-мерных *плоскостей* и *гиперплоскостей* $(m < n-1)$.

2. Потребуем, чтобы в некоторой области Ω пространства A_n в любой точке $A \in \Omega$ имело место соотношение $A \in \Lambda(A) \subset \mathrm{H}(A)$.

Определение 1. Пара распределений (7) с таким отношением инцидентности $A \in \Lambda(A) \subset \mathrm{H}(A)$ их соответствующих элементов называется *гиперполосным распределением* $\mathscr{H}$, или $\mathscr{H}$ *-распределением* [2; 5].

При этом распределение плоскостей $\Lambda(A)$ называется *базисным распределением* (или Λ*-подрасслоением*), распределение плоскостей $\mathrm{H}(A)$ — *оснащающим распределением* (или H*-подрасслоением*), а точка A — *центром* $\mathscr{H}$ -распределения [2; 5].

Требование $\Lambda(A) \subset \mathrm{H}(A)$ приводит к равенству

$$\Lambda_i^n = \mathrm{H}_i^n + \Lambda_i^\alpha \mathrm{H}_\alpha^n, \tag{8}$$

дифференцируя которое и учитывая (4—6), находим

$$\Lambda_{iK}^n = \mathrm{H}_{iK}^n + \Lambda_i^\alpha \mathrm{H}_{\alpha K}^n + \mathrm{H}_\alpha^n \Lambda_{iK}^\alpha . \tag{9}$$

Канонизируем репер $\{A, \vec{e}_J\}$: поместим $\{\vec{e}_\alpha\}$ в плоскость $\mathrm{H}(A)$, а $\{\vec{e}_i\}$ — в $\Lambda(A)$. В выбранном репере 0-го порядка R^0 из (3) и (6) следует

$$\Lambda_j^{\hat{\alpha}} = 0, \ \mathrm{H}_a^n = 0, \tag{10}$$

а структурные формы (4), (5) принимают вид

$$\nabla\Lambda_i^{\hat{\alpha}} = \omega_i^{\hat{\alpha}}, \quad \nabla \mathrm{H}_a^n = \omega_a^n . \tag{11}$$

В силу (10) из соотношений (8) и (9) имеем

$$\Lambda_i^n = \mathrm{H}_i^n, \quad \mathrm{H}_{jK}^n = \Lambda_{jK}^n . \tag{12}$$

Кроме того, для простоты изложения обозначим $\mathrm{H}_{\alpha K}^n \overset{\mathrm{def}}{=} \Lambda_{\alpha K}^n$. С учетом этого и соотношений (10)—(12) уравнения (7) представим в виде

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K \ (\text{а}), \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K \ (\text{б}), \ \omega_i^n = \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K . \tag{13}$$

Замыкая уравнения (13), получим

$$\nabla\Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \nabla\Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \nabla\Lambda_{\alpha K}^n - \Lambda_{iK}^n \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \tag{14}$$

где $\Lambda_{i[KL]}^n = \Lambda_{\alpha[K}^n \Lambda_{|i|L]}^\alpha$; $\Lambda_{i[KL]}^\alpha = 0$; $\Lambda_{\alpha[KL]}^n = 0$.

Таким образом, $\mathscr{H}$ -распределение в репере R^0 задается дифференциальными уравнениями (13), (14).

Рассмотрим регулярные гиперполосные распределения [2; 5], для которых главный фундаментальный тензор $\{\Lambda_{ij}^n\}$ 1-го порядка невырожден:

$$\Lambda_0 \overset{\text{def}}{=} \det\left\|\Lambda^n_{ij}\right\| \neq 0. \tag{15}$$

Условие (15) позволяет ввести в рассмотрение обращенный фундаментальный тензор $\{\Lambda^{ij}_n\}$ 1-го порядка с компонентами

$$\Lambda^{ik}_n \Lambda^n_{kj} = \delta^i_j,\ \ \Lambda^{ki}_n \Lambda^n_{jk} = \delta^i_j,\ \ \nabla\Lambda^{is}_n = -\Lambda^{ik}_n \Lambda^{js}_n \Lambda_{kjL}\omega^L. \tag{16}$$

Теорема 1. *Регулярное* $\mathscr{H}$ *-распределение* A_n *существует и определяется с произволом (n − m − 1)(m + 1) + m функций n аргументов.*

Доказательство. Чистое замыкание системы уравнений (13):

$$\Delta\Lambda^{\mathrm{n}}_{\mathrm{iK}} \wedge \omega^{\mathrm{K}} = 0,\ \Delta\Lambda^{\alpha}_{\mathrm{iK}} \wedge \omega^{\mathrm{K}} = 0,\ \Delta\Lambda^{\mathrm{n}}_{\alpha\mathrm{K}} \wedge \omega^{\mathrm{K}} = 0. \tag{17}$$

Найдем характеры (17) [6; 7]: $S_1 = (n-m-1)(m+1)+m \overset{\text{def}}{=} A$, $S_2 = A$, …, $S_n = A$. Тогда число Картана (17) равно $Q = S_1 + 2S_2 + ... + nS_n = \dfrac{n(n+1)}{2}A.$

Разрешим систему (17) по Лемме Картана [7]:

$$\Delta\Lambda^n_{iL} = \Lambda^n_{iLK}\omega^K,\ \ \Delta\Lambda^\alpha_{iL} = \Lambda^\alpha_{iLK}\omega^K,\ \ \Delta\Lambda^n_{\alpha L} = \Lambda^n_{\alpha LK}\omega^K. \tag{18}$$

Число линейно независимых функций в правых частях (1) $N = \dfrac{n(n+1)}{2}A.$

Итак, $Q = N$, то есть система уравнений (13, 14) находится в инволюции [7]. Решение этой системы уравнений существует и определяется с произволом $S_n = (n-m-1)(m+1)+m$ функций n аргументов.

3. Для регулярного $\mathscr{H}$ -распределения, согласно лемме *Н. М. Остиану* [8], возможна частичная канонизация репера R^0, как это следует из

$$\nabla\Lambda^{\mathrm{n}}_{\alpha\mathrm{j}} - \Lambda^{\mathrm{n}}_{\mathrm{ij}}\omega^{\mathrm{i}}_{\alpha} = \Lambda^{\mathrm{n}}_{\alpha\mathrm{jL}}\omega^{\mathrm{L}}. \tag{19}$$

Действительно, полагая $\Lambda^n_{\alpha j} = 0$ и учитывая (16), разрешим уравнения (19) относительно форм ω^i_α: $\omega^k_\alpha = -\Lambda^{jk}_n \Lambda^n_{\alpha jL}\omega^L \overset{\text{def}}{=} \Lambda^k_{\alpha L}\omega^L$.

Геометрический смысл канонизации: $\{\vec{e}_\alpha\}$ помещаются в характеристику L_{n-m-1} гиперплоскости H(A) [5], полученную при смещениях центра A вдоль кривых, принадлежащих Λ-подрасслоению. Выбранный так репер R^1 является репером 1-го порядка $\mathscr{H}$ -распределения.

Запишем уравнения $\mathscr{H}$ -распределения относительно репера R^1:

$$\omega^n_i = \Lambda^n_{iL}\omega^L,\ \ \omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iL}\omega^L,\ \ \omega^n_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^{\hat\beta},\ \ \omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha L}\omega^L. \tag{20}$$

Геометрические объекты $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{iL}, \Lambda^\alpha_{iL}, \Lambda^n_{\alpha\hat\beta}\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda^i_{\alpha L}, \Lambda^n_{iLK}, \Lambda^\alpha_{iLK}, \Lambda^n_{\alpha\hat\beta K}\}$ — *фундаментальные объекты* соответственно 1-го и 2-го порядка регулярного $\mathscr{H}$ -распределения. Функции в (20) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
\nabla\Lambda^n_{ij} = \Lambda^n_{ijK}\omega^K, \nabla\Lambda^n_{i\alpha} = \Lambda^n_{i\alpha K}\omega^K, \nabla\Lambda^n_{in} - \Lambda^n_{ij}\omega^j_n - \Lambda^n_{i\alpha}\omega^\alpha_n = \Lambda^n_{inK}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^n_{ij}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{ijK}\omega^K, \nabla\Lambda^\alpha_{i\beta} + \Lambda^n_{i\beta}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{i\beta K}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^\alpha_{in} - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_n - \Lambda^\alpha_{i\beta}\omega^\beta_n + \Lambda^n_{in}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{inK}\omega^K, \nabla\Lambda^n_{\alpha\beta} = \Lambda^n_{\alpha\beta K}\omega^K, \nabla\Lambda^n_{\alpha n} - \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n = \Lambda^n_{\alpha nK}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^i_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^i_n = \Lambda^i_{\alpha\beta K}\omega^K, \nabla\Lambda^i_{\alpha j} = \Lambda^i_{\alpha jK}\omega^K, \nabla\Lambda^i_{\alpha n} - \Lambda^i_{\alpha j}\omega^j_n - \Lambda^i_{\alpha\beta}\omega^\beta_n + \Lambda^n_{\alpha n}\omega^i_n = \Lambda^i_{\alpha nK}\omega^K
\end{gathered} \tag{21}$$

и соотношениям

$$\Lambda^n_{\alpha n}\Lambda^n_{[jk]}+\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{[jk]}+\Lambda^n_{i[j}\Lambda^i_{|\alpha|k]}=0. \qquad (22)$$

Заметим, что коэффициенты в правых частях уравнений (21), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка регулярное $\mathscr{H}$ -распределение аффинного пространства A_n задается относительно репера R^1 уравнениями (20), (21) и соотношениями (22).*

В общем случае (при локальной постановке вопроса) определители $L_0 \overset{\text{def}}{=} \det\|\Lambda^n_{\alpha\beta}\|$, $\mathrm{H}_0 \overset{\text{def}}{=} \det\|\Lambda^n_{ab}\|$ отличны от нуля. Компоненты определителя H_0 имеют строение $\mathrm{H}_0=\det\|\Lambda^n_{ab}\|=\begin{Vmatrix}\Lambda^n_{ij} & \Lambda^n_{i\beta}\\ 0 & \Lambda^n_{\alpha\beta}\end{Vmatrix}$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\nabla\Lambda^n_{ab}=\Lambda^n_{abK}\omega^K$.

Для невырожденных тензоров $\{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda^n_{ab}\}$ введем, вообще говоря, несимметрические обращенные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda^{\alpha\beta}_n\}$, $\{\Lambda^{ab}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям $\Lambda^{\alpha\beta}_n\Lambda^n_{\beta\gamma}=\Lambda^{\beta\alpha}_n\Lambda^n_{\gamma\beta}=\delta^\alpha_\gamma$, $\Lambda^{ab}_n\Lambda^n_{bc}=\Lambda^{ba}_n\Lambda^n_{cb}=\delta^a_c$ и соответственно дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda^{\alpha\beta}_n=-\Lambda^{\alpha\gamma}_n\Lambda^{\eta\beta}_n\Lambda^n_{\gamma\eta K}\omega^K \overset{def}{=} \Lambda^{\alpha\beta}_{nK}\omega^K,\ \ \nabla\Lambda^{ab}_n=-\Lambda^{ac}_n\Lambda^{db}_n\Lambda^n_{cdK}\omega^K \overset{def}{=} \Lambda^{ab}_{nK}\omega^K.$$

$\{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda^n_{ab}\}$ — *фундаментальные тензоры* порядка 1 L-, H-подрасслоения $\mathscr{H}$ -распределения, $\{\Lambda^{\alpha\beta}_n\}$, $\{\Lambda^{ab}_n\}$ — *обращенные фундаментальные тензоры* порядка 1 соответственно L-, H-подрасслоений.

В заключение введем в рассмотрение функции $\{\Lambda^n_{an}\}\overset{\text{def}}{=}\{\Lambda^n_{in},\Lambda^n_{\alpha n}\}$, которые удовлетворяют в силу (21) уравнениям

$$\nabla\Lambda^n_{an}-\Lambda^n_{ab}\omega^b_n\equiv 0. \qquad (23)$$

2. Тензор неголономности $\mathscr{H}$– распределения

1. **Определение 2.** $\mathscr{H}$ -распределение *голономно* [4], если базисное Λ-распределение голономно. Тогда распределение плоскостей Λ определяет $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей (Λ огибаются m-мерными поверхностями V_m $(n-m)$-параметрического семейства).

Система уравнений

$$\omega^n=0,\ \ \omega^\alpha=0, \qquad (24)$$

ассоциированная с базисным Λ-распределением, вполне интегрируема, если

$$\Lambda^n_{[ij]}=\Lambda^\alpha_{[ij]}=0\Leftrightarrow r^\alpha_{ij}=r^n_{ij}=0. \qquad (25)$$

$\{r^{\hat\alpha}_{ij}\}$ — *тензор неголономности* $\mathscr{H}$ -распределения. Обращение $\{r^{\hat\alpha}_{ij}\}$ (25) в 0 есть аналитическое условие голономности $\mathscr{H}$ -распределения.

При смещении центра A вдоль фиксированной поверхности V_m, (20), (21), (24) в выбранном репере 1-го порядка суть дифференциальные уравнения регулярной m-мерной гиперполосы $\mathrm{H_m}\subset\mathrm{A_n}$ [9].

Следовательно, при выполнении условий (25) пространство A_n расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m так, что $\Lambda(A)$ в каждом центре A — касательная плоскость базисной поверхности V_m (23) гиперполосы H_m, $\mathrm{H}_{n-1}(A)$ — ее главная касательная гиперплоскость, а плоскость $\mathrm{L}_{\mathrm{n-m-1}}(\mathrm{A})$ — характеристика H_m.

2. Аналогично при $r^{\hat{i}}_{\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow \Lambda^{\hat{i}}_{[\alpha\beta]}=0$ пространство A_n расслаивается на $(m+1)$-параметрическое семейство регулярных $(n-m-1)$-мерных гиперполос так, что характеристическая плоскость $L_{n-m-1}(A)$ в каждом центре A — касательная плоскость базисной поверхности V_{n-m-1} гиперполосы H_{n-m-1}, а $\mathrm{H}(A)$ — ее главная касательная гиперплоскость.

3. Ассоциированное с оснащающим $\mathscr{H}$-распределением уравнение

$$\omega^n=0 \tag{26}$$

вполне интегрируемо, если

$$\Lambda^n_{[ij]}=0,\ \Lambda^n_{[\alpha\beta]}=0,\ \Lambda^n_{i\alpha}=0, \tag{27}$$

что равносильно условиям

$$r^n_{ij}=0,\ r^n_{\alpha\beta}=0,\ \Lambda^n_{i\alpha}=0. \tag{28}$$

В этом случае ((27) или (28)) $\mathscr{H}$ -распределение определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} (плоскости H_{n-1} огибаются поверхностями V_{n-1} однопараметрического семейства). При смещении центра A вдоль фиксированной гиперповерхности V_{n-1} уравнения (20), (26) (без соответствующих замыканий) задают гиперповерхность, в каждой точке $A\in V_{n-1}$ которой задана пара (Λ, L) сопряженных касательных плоскостей относительно главного фундаментального тензора Λ^n_{ab} гиперповерхности V_{n-1}.

Таким образом, теорию регулярных гиперполосных распределений аффинного пространства A_n можно применить как для исследования регулярных гиперполос $\mathrm{H}_m\subset A_n$, так и изучения дифференциальной геометрии специальных классов гиперповерхностей $V_{n-1}\subset A_n$.

3. Соответствие Бомпьяни — Пантази

1. Для распределения двумерных плоскостей в трехмерном проективном пространстве известно соответствие (*проективитет*) Бомпьяни — Пантази [10—12] между нормалями 1-го и 2-го рода, когда нормаль 2-го рода является характеристикой элемента распределения при смещении центра A вдоль кривой, касающейся нормали 1-го рода. Обобщение этого соответствия на случай распределения m-мерных линейных элементов в P_n было дано в работе [4], а на случай гиперплоскостных элементов $\mathrm{H}(A)\subset A_{n+1}$ было проведено *Э. Д. Алшибая* [13; 14].

Следуя работе [13], введем биекции Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода, для Н-, Λ- и L-подрасслоений, ассоциированных с $\mathscr{H}$ -распределением.

2. **Определение 3.** *Нормалью 1-го рода элемента* Н-подрасслоения (плоскости Н(A)) называется инвариантная прямая $\nu_1(A)$, удовлетворяющая условию $\nu_1(A) \cap \mathrm{H}(A) = A$, а *нормалью 2-го рода* — инвариантная плоскость $\nu_{n-2}(A)$ такая, что $\nu_{n-2}(A) \subset H(A)$, $A \notin \nu_{n-2}(A)$.

Поле нормалей 1-го рода $\nu_1(A)$ задается полем $\nabla\nu_n^a + \omega_n^a = \nu_{nK}^a \omega^K$ квазитензора $\{\nu_n^a\}$, 2-го рода $\nu_{n-2}(A)$ — полем тензора $\{\nu_a\}$: $\nabla\nu_a = \nu_{nK}\omega^K$.

Определение 4. Будем говорить, что Н-подрасслоение (соответственно L-подрасслоение, Λ-подрасслоение) *нормализовано*, если оно одновременно оснащено полями 1-го и 2-го рода Нордена, а саму нормализацию будем обозначать символами $(\nu_n^a;\nu_a)$ или $(\nu_1;\nu_{n-2})$ (соответственно символами $(\nu_n^\alpha;\nu_\alpha)$, $(\nu_n^i;\nu_i)$ или $(\nu_{m+1};\nu_{n-m-2})$, $(\nu_{n-m};\nu_{nm-1})$).

3. Зададим точку $F \in \mathrm{H}(A)$ следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{A} + x^a \vec{e}_a, \quad x^n = 0. \tag{29}$$

Потребуем, чтобы она не выходила из гиперплоскости Н(A) при смещении центра A распределения $\mathscr{H}$ вдоль кривой

$$\omega^a = \nu_n^a \omega^n, \tag{30}$$

касающейся нормали $\nu_1 = [A, \vec{\nu}_n] \overset{\text{def}}{=} [A, \nu_n^a \vec{e}_a + \vec{e}_n]$ 1-го рода гиперплоскости Н(A), то есть чтобы

$$d\vec{F} = \vartheta^a \vec{e}_a, \ (x^n = 0). \tag{31}$$

Замечание. В дальнейшем поле нормалей $\nu_1 = [A, \vec{\nu}]$ 1-го рода Н-подрасслоения будем называть *полем нормалей* $\vec{\nu}$.

Точка F, удовлетворяющая условию (31), называется *фокальной точкой* гиперплоскости Н(A) [4; 13], а направление смещения точки A, соответствующей фокальной точке F,— *фокальным направлением*.

Из (31) в силу (1), (29) следует $\vartheta^a = dx^a + x^b \omega_b^a + \omega^a$ и

$$x^a \omega_a^n + \omega^n = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) определяет многообразие фокальных точек Н(A), которое относительно R^1 согласно (20), (23), (30) приведем к виду

$$\nu_a x^a - 1 = 0, \ \ x^n = 0, \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered} \nu_a \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_{ab}^n \nu_n^b - \mathscr{A}_a \text{ (a)}, \nabla\nu_a = \nu_{aK}\omega^K, \mathscr{A}_a \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{an}^n, \\ \nabla\mathscr{A}_a = \Lambda_{ab}^n \omega_n^b + \mathscr{A}_{aK}\omega^K, \nabla\nu_{aK} \equiv \Lambda_{aK}^n \nu_b \omega_n^b. \end{gathered} \tag{34}$$

Таким образом, уравнения (33) задают в локальном репере R^1 нормаль 2-го рода плоскости Н(A), а поле нормалей 2-го рода Н-подрасслоения задается дифференциальными уравнениями (34).

Разрешим уравнения (34а) относительно ν_n^b. Умножив обе части уравнения (34а) на Λ_n^{ca} и свернув по a, получаем

$$\nu_n^c = -\Lambda_n^{ca}\nu_a + \mathscr{A}_n^c \text{ (a)}, \ \nabla\nu_n^c + \omega_n^c = \nu_{nK}^c \omega^K, \tag{35}$$

где

$$\mathcal{A}_n^c \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{ca}\mathcal{A}_a, \quad \nabla\mathcal{A}_n^c + \omega_n^c = \mathcal{A}_{nK}^c\omega^K, \quad \nabla\nu_{nK}^c + \Lambda_{bK}^n\nu_n^b\omega_n^c + \Lambda_{bK}^n\nu_n^c\omega_n^b \equiv 0. \quad (36)$$

Итак, при помощи формул (34a) и (35a) устанавливается взаимно однозначное соответствие между нормалями 1-го и 2-го рода H-подрасслоения. Это соответствие (биекция) является для оснащающего H-подрасслоения аналогом соответствия Бомпьяни — Пантази [13; 14].

Аналогично устанавливаем соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями рода 1 $\nu_{m+1}(\nu_n^\alpha)$ и рода 2 $\nu_{n-m-1}(\nu_\alpha)$ L-подрасслоения:

$$\begin{gathered} \nu_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\nu_n^\beta - \mathcal{A}_\alpha, \nabla\nu_\alpha = \nu_{\alpha K}\omega^K, \nabla\nu_{\alpha K} \equiv \Lambda_{\alpha K}^n\nu_\beta\omega_n^\beta, \\ \nu_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta - \mathcal{A}_n^\alpha, \nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha\omega^K, \end{gathered} \quad (37)$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_\alpha = \Lambda_{\alpha n}^n, \nabla\mathcal{A}_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta + \mathcal{A}_{\alpha K}\omega^K, \mathcal{A}_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\mathcal{A}_\beta, \\ \nabla\mathcal{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathcal{A}_{nK}^\alpha\omega^K, \nabla\nu_{nK}^\alpha - (\Lambda_{iK}^\alpha - \Lambda_{iK}^n)\omega_n^i + \Lambda_{\beta K}^n\nu_n^\beta\omega_n^\alpha + \Lambda_{\beta K}^n\nu_n^\alpha\omega_n^\beta \equiv 0. \end{gathered} \quad (38)$$

4. Из (36) следует, что компоненты $\{\mathcal{A}_n^i\}$ квазитензора $\{\mathcal{A}_n^c\}$ $\mathcal{A}_n^i \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_{ij}^n\Lambda_{jn}^n - \Lambda_n^{i\alpha}\Lambda_{\alpha n}^n$ и образуют квазитензор 1-го порядка:

$$\nabla\mathcal{A}_n^i + \omega_n^i = \mathcal{A}_{nK}^i\omega^K. \quad (39)$$

Будем искать соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода Λ-подрасслоения в виде (35) (или (37)):

$$\nu_n^i = -\Lambda_n^{ij}\nu_j + \mathcal{A}_n^i. \quad (40)$$

Разрешая уравнение (40) относительно величин $\{\nu_j\}$, получим

$$\nu_i = -\Lambda_{ij}^n\nu_n^j - \tilde{\mathcal{A}}_i, \quad \tilde{\mathcal{A}}_i = -\Lambda_{ij}^n\mathcal{A}_n^j, \quad \nabla\tilde{\mathcal{A}}_i \equiv \Lambda_{ij}^n\omega_n^j.$$

Функции $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i\}$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i\omega^K, \quad \nabla\nu_i = \nu_{iK}\omega_K. \quad (41)$$

Замыкания уравнений (41) с учетом (2) и (20) приводят к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют $\{\nu_{nK}^i\}$ и $\{\nu_{iK}\}$:

$$\nabla\nu_{nK}^i \equiv (\Lambda_{\alpha K}^i - \Lambda_{\alpha K}^n\nu_n^i)\omega_n^i - \Lambda_{jK}^n\nu_n^i\omega_n^j - \Lambda_{jK}^n\nu_n^j\omega_n^i, \quad \nabla\nu_{iK} \equiv \Lambda_{iK}^n\nu_s\omega_n^s.$$

5. Отметим, что поле квазитензора $\{\mathcal{A}_n^c\}$ (36) для гиперплоскостного распределения аффинного пространства было введено *Э. Д. Алшибая* [13; 14] и дана его геометрическая интерпретация. В силу этого поле нормалей 1-го рода $N_1 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_1$ (поле нормалей $\vec{\mathcal{I}}\{\mathcal{A}_n^a\}$) оснащающего H-подрасслоения данного $\mathcal{H}$ -распределения будем называть в дальнейшем *полем нормалей Э. Д. Алшибая*. В соответствии с этой терминологией поле нормалей 1-го рода $N_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{n+1}$ ($N_{n-m} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{n-m}$), определяемое полем квазитензора $\mathcal{A}_n^\alpha$ (38) ($\mathcal{A}_n^i$ (39)), назовем *полем нормалей Алшибая 1-го рода* L-подрасслоения (Λ-подрасслоения).

Следуя работам [13; 14], аналогично можно показать, что свойства нормалей Алшибая $\vec{\mathscr{A}}$ сохраняют силу и в случае гиперполосного распределения ($\mathscr{H}$ -распределения).

Имеет место

Теорема 3. *При смещении центра A $\mathscr{H}$ -распределения вдоль кривой, касающейся нормали Алшибая $\vec{\mathscr{A}}$ ($\vec{\mathscr{A}} = \mathscr{A}_n^a \vec{e}_a + \vec{e}_n$), гиперплоскостной элемент H(A) смещается параллельно. В биекции Бомпьяни — Пантази (35) нормали Алшибая $\vec{\mathscr{A}}(A)$, определенной объектом $\{\mathscr{A}_n^c\}$ (36), соответствует бесконечно удаленная (n —2)-плоскость гиперплоскости* H*(A) (в этом случае в уравнении (33) $\nu_a = 0$).*

Список литературы

1. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

2. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

3. *Лаптев Г. Ф.* Распределения касательных элементов // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 29—48.

4. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных элементов в пространстве проективной связности // Там же. С. 49—94.

5. *Попов Ю. И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ, №6807-В87 Деп., 1986.

6. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм : учебное пособие. Калининград, 1978. Ч. 1.

7. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М., 1948.

8. *Остиану Н. М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pares et appl. RPR. 1962. T. 7, №2. С. 239—263.

9. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Труды семинара по векторному и тензорному анализу /ВИНИТИ. М., 1950. Вып. 8. С. 97—272.

10. *Bompiani E.* Sulle varieta analonome. Rend. dei Lincei, 1938. Vol. 27. P. 37—52.

11. *Pantazi A.* Opera matematica. Bucuresti. Ed. Acad. RPR, 1956.

12. *Mihailescu T.* Geometrie diferentiala proiectiva. Bucuresti: Ed. Acad. RPR, 1958.

13. *Алшибая Э. Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

14. *Алшибая Э. Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : монография. Тбилиси, 1990.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: matsievsky@newmail.ru.

About the author

Dr Juriy Popov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: matsievsky@newmail.ru.